

FORME DIFFERENZIALI

0-forme

Sia Ω un aperto di \mathbb{R}^n . Per definizione, le 0-forme di classe C^k su Ω sono le funzioni di classe C^k su Ω .

1-forme

Definizione 1 (1-forme). *Sia Ω un aperto di \mathbb{R}^n . Una 1-forma differenziale di classe C^k su Ω è un'espressione della forma*

$$\alpha_1(x) dx_1 + \alpha_2(x) dx_2 + \alpha_3(x) dx_3 + \cdots + \alpha_n(x) dx_n,$$

dove $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $\alpha_1, \dots, \alpha_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ sono funzioni di classe C^k su Ω .

Esempio 2.

- $\sum_{i=1}^n x_i dx_i$ e $\sum_{i=1}^n x_i^2 dx_i$ sono forme differenziali in \mathbb{R}^n ;
- $(x^2 + y) dx + xy dy$ è una 1-forma differenziale in \mathbb{R}^2 , dove x e y sono le coordinate nel piano;
- $x dx + z dy - y dz$ e $\sin(z) dx - dz$ sono forme differenziali in \mathbb{R}^3 , dove x, y, z sono le coordinate in \mathbb{R}^3 .

Definizione 3 (Operazioni con le forme differenziali). *Siano*

$$\alpha = \alpha_1(x) dx_1 + \alpha_2(x) dx_2 + \alpha_3(x) dx_3 + \cdots + \alpha_n(x) dx_n,$$

$$\beta = \beta_1(x) dx_1 + \beta_2(x) dx_2 + \beta_3(x) dx_3 + \cdots + \beta_n(x) dx_n,$$

due 1-forme di classe C^k (in un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^d$). Definiamo la forma $\alpha + \beta$ come

$$\alpha + \beta = (\alpha_1(x) + \beta_1(x)) dx_1 + (\alpha_2(x) + \beta_2(x)) dx_2 + \cdots + (\alpha_n(x) + \beta_n(x)) dx_n.$$

Inoltre, data una funzione $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^k , definiamo la forma $f\alpha$ come

$$f\alpha := f(x)\alpha_1(x) dx_1 + f(x)\alpha_2(x) dx_2 + \cdots + f(x)\alpha_n(x) dx_n.$$

2-forme

Definizione 4 (2-forme). *Sia Ω un aperto di \mathbb{R}^n . Una 2-forma differenziale di classe C^k su Ω è un'espressione della forma*

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} \alpha_{ij}(x) dx_i \wedge dx_j,$$

dove $x = (x_1, \dots, x_n)$ e, per ogni $1 \leq i < j \leq n$, la funzione $\alpha_{ij} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ è di classe C^k su Ω .

Inoltre, definiamo

$$dx_i \wedge dx_i := 0 \quad \text{per ogni } i = 1, \dots, n.$$

$$dx_j \wedge dx_i := -dx_i \wedge dx_j \quad \text{per ogni } 1 \leq i < j \leq n.$$

Definizione 5 (Operazioni con le 2-forme differenziali). *Siano*

$$\alpha = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \alpha_{ij}(x) dx_i \wedge dx_j,$$

$$\beta = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \beta_{ij}(x) dx_i \wedge dx_j,$$

due 2-forme di classe C^k (in un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^d$). Definiamo la forma $\alpha + \beta$ come

$$\alpha + \beta = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (\alpha_{ij}(x) + \beta_{ij}(x)) dx_i \wedge dx_j.$$

Inoltre, data una funzione $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^k , definiamo la forma $f\alpha$ come

$$f\alpha := \sum_{1 \leq i < j \leq n} (f(x)\alpha_{ij}(x)) dx_i \wedge dx_j.$$

k -forme

Definizione 6 (k -forme). Sia Ω un aperto di \mathbb{R}^n e sia $k \in \mathbb{N}$. Una k -forma differenziale di classe C^m su Ω è un'espressione della forma

$$\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \alpha_{i_1 i_2 \dots i_k}(x) dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_k},$$

dove $x = (x_1, \dots, x_n)$ e, per ogni k -upla di indici $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$, la funzione $\alpha_{i_1 i_2 \dots i_k} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ è di classe C^m su Ω .

Inoltre, possiamo definire l'espressione $dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$ anche per indici $1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n$ che non sono ordinati. Per fare ciò usiamo la regola seguente:

- se due indici consecutivi sono uguali (per esempio $i_1 = i_2$ oppure $i_2 = i_3$, oppure $i_{k-1} = i_k$), allora $dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} = 0$;
- possiamo scambiare l'ordine di due indici consecutivi cambiando il segno davanti. Per esempio

$$dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge dx_{i_3} \wedge dx_{i_4} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} = -dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge dx_{i_4} \wedge dx_{i_3} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}.$$

Possiamo applicare questa operazione più volte, ogni volta cambiando il segno.

Esempio 7. Per esempio, in dimensione 3 abbiamo:

$$dx \wedge dy \wedge dz = -dx \wedge dz \wedge dy = -(-dz \wedge dx \wedge dy) = dz \wedge dx \wedge dy.$$

In dimensione 4, usando le coordinate x, y, z, t , possiamo calcolare

$$dy \wedge dx \wedge dt \wedge dz = -dx \wedge dy \wedge dt \wedge dz = dx \wedge dy \wedge dz \wedge dt.$$

Si può facilmente verificare, che scambiando solo due indici l'espressione cambia segno. Per esempio,

$$dt \wedge dy \wedge dz \wedge dx = -dx \wedge dy \wedge dz \wedge dt.$$

Definizione 8 (Operazioni con le k -forme differenziali). Siano

$$\alpha = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \alpha_{i_1 i_2 \dots i_k}(x) dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_k},$$

$$\beta = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \beta_{i_1 i_2 \dots i_k}(x) dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_k},$$

due 2-forme di classe C^m (in un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^d$). Definiamo la forma $\alpha + \beta$ come

$$\alpha + \beta = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} (\alpha_{i_1 i_2 \dots i_k}(x) + \beta_{i_1 i_2 \dots i_k}(x)) dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}.$$

Inoltre, data una funzione $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^m , definiamo la forma $f\alpha$ come

$$f\alpha = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} (f(x) \alpha_{i_1 i_2 \dots i_k}(x)) dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}.$$

Prodotto di forme differenziali

Sia Ω un aperto di \mathbb{R}^n e siano

$$\alpha = \alpha_1(x) dx_1 + \alpha_2(x) dx_2 + \alpha_3(x) dx_3 + \dots + \alpha_n(x) dx_n,$$

$$\beta = \beta_1(x) dx_1 + \beta_2(x) dx_2 + \beta_3(x) dx_3 + \dots + \beta_n(x) dx_n,$$

due 1-forme di classe C^k su Ω . Definiamo la 2-forma $\alpha \wedge \beta$ come

$$\alpha \wedge \beta := \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i(x) \beta_j(x) dx_i \wedge dx_j.$$

Il prodotto di una k -forma α con una l -forma β è una $(k+l)$ forma $\alpha \wedge \beta$ che può essere calcolata attraverso le regole seguenti:

- se f e g sono funzioni, α è una k -forma e β è una l -forma, allora

$$(f(x)\alpha) \wedge (g(x)\beta) = f(x)g(x) \alpha \wedge \beta.$$

Per esempio,

$$(x^2 dy) \wedge (y dx) = x^2 y dy \wedge dx.$$

- se α e β sono due k -forme e γ e δ sono l -forme, allora

$$(\alpha + \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge \gamma + \beta \wedge \gamma,$$

$$\alpha \wedge (\gamma + \delta) = \alpha \wedge \gamma + \alpha \wedge \delta.$$

- se α è una k -forma e β è una l -forma, allora

$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{kl} \beta \wedge \alpha.$$

- se α è una k -forma, β è una l -forma e γ è una m -forma, allora

$$(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma).$$

Esempio 9.

$$\begin{aligned} (x dx + y dy) \wedge (y dx - x dy) &= xy dx \wedge dx - x^2 dx \wedge dy + y^2 dy \wedge dx - xy dy \wedge dy \\ &= -x^2 dx \wedge dy + y^2 dy \wedge dx \\ &= -x^2 dx \wedge dy - y^2 dx \wedge dy \\ &= -(x^2 + y^2) dx \wedge dy. \end{aligned}$$

Derivata esterna e differenziale

Definizione 10. Siano Ω un sottoinsieme aperto di \mathbb{R}^n e $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di classe C^m per un qualche $m \geq 1$. Definiamo il differenziale di f come

$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) dx_i.$$

Osserviamo che df è una 1-forma di classe C^{m-1} su Ω .

Più in generale, data una k -forma

$$\alpha = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \alpha_{i_1 i_2 \dots i_k}(x) dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_k},$$

di classe C^m su Ω , definiamo la derivata esterna di α come

$$d\alpha = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} d\alpha_{i_1 i_2 \dots i_k} \wedge dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}.$$

Osserviamo che $d\alpha$ è una $(k+1)$ -forma di classe C^{m-1}

Esempio 11. In \mathbb{R}^2 , con coordinate x, y , calcoliamo

- $d(x^2) = 2x dx$;
- $d(xy) = y dx + x dy$;
- $d(ye^x) = ye^x dx + e^x dy$;
- $d(ydx) = dy \wedge dx = -dx \wedge dy$;
- $d(xydy) = d(xy) \wedge dy = (y dx + x dy) \wedge dy = y dx \wedge dy$;
- $d(x dy - y dx) = dx \wedge dy - dy \wedge dx = 2 dx \wedge dy$;
- $d(x dx + y dy) = dx \wedge dx + dy \wedge dy = 0$.

Esempio 12. In \mathbb{R}^3 , con coordinate x, y, z , calcoliamo

- $d(xyz) = yz dx + xz dy + xy dz$;
- $d(x^2z) = 2xz dx + x^2 dz$;
- $d(y \sin(z)) = \sin z dy + y \cos z dz$;
- $d(yzdx) = d(yz) \wedge dx = (z dy + y dz) \wedge dx = z dy \wedge dx + y dz \wedge dx = -z dx \wedge dy + y dz \wedge dx$;
- $d(d(xyz)) = ?$

$$\begin{aligned} d(d(xyz)) &= d(yz dx + xz dy + xy dz) \\ &= d(yz) \wedge dx + d(xz) \wedge dy + d(xy) \wedge dz \\ &= (z dy + y dz) \wedge dx + (z dx + x dz) \wedge dy + (x dy + y dx) \wedge dz \\ &= z dy \wedge dx + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy + x dz \wedge dy + x dy \wedge dz + y dx \wedge dz \\ &= 0. \end{aligned}$$

Esercizio 13. Scrivere come

$$a(x, y, z) dx + b(x, y, z) dy + c(x, y, z) dz,$$

oppure come

$$A(x, y, z) dx \wedge dy + B(x, y, z) dy \wedge dz + C(x, y, z) dz \wedge dx,$$

le forme differenziali seguenti.

(1) $d\left(\frac{xy}{z}\right)$

(2) $d(x - y)$

(3) $d(xy - yz + zx)$

(4) $d(x - y) \wedge d(y - z)$

(5) $d(x + z) \wedge d(x - z)$

(6) $d(xy) \wedge d(xz)$

(7) $d(zd(xy));$

(8) $d(d(xy))$

(9) $d(d(x^2 - z^2))$

(10) $d(xy) \wedge (y dx - x dy).$

Esercizio 14. Calcolare

$$d\left(-\frac{1}{y}dx + \frac{1}{x}dy\right).$$

Esercizio 15. Calcolare

$$d\left(\frac{-y}{x+y}dx + \frac{x}{x+y}dy\right).$$

Esercizio 16. Calcolare

$$d\left(\frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy\right).$$

Esercizio 17. Sia $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1 . Calcolare

$$d\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\varphi(x^2+y^2)dx + \frac{x}{x^2+y^2}\varphi(x^2+y^2)dy\right).$$